

مراجعة الأسطر

مقرر الميكانيك 2

المدة: ساعة ونصف

السنة الثالثة رياضيات

الفصل الأول 2015 - 2016

كلية العلوم
قسم الرياضيات

أجب عن الأسئلة التالية: (ملاحظة: يفضل الرسم بالرصاص)

السؤال الأول (28 درجة): اختر الإجابة الصحيحة في كل مما يلي:

1- عزم عطالة قضيب متجانس كتلته M وطوله L بالنسبة لمحور منطبق على استقامته هو:

- (أ) $\frac{ML^2}{3}$ ، (ب) $\frac{ML^2}{6}$ ، (ج) $\frac{ML^2}{12}$ ، (د) صفر ، (هـ) كل ماسبق صحيح.

2- عزم عطالة سلك دائري متجانس كتلته M ، ونصف قطره R بالنسبة لنقطة من محيطه ، هو:

- (أ) $\frac{MR^2}{2}$ ، (ب) MR^2 ، (ج) $2MR^2$ ، (د) $3MR^2$ ، (هـ) كل ماسبق خطأ.

3- عزم عطالة صفيحة دائرية متجانسة كتلتها M ونصف قطرها R بالنسبة لنقطة من محيطها هو:

- (أ) $\frac{MR^2}{2}$ ، (ب) MR^2 ، (ج) $2MR^2$ ، (د) $3MR^2$ ، (هـ) $\frac{3MR^2}{2}$.

4- لتعيين موضع جسم صلب بشكل عام يكفي معرفة موضع:

- (أ) ثلاث نقاط منه ليست على استقامة واحدة ، (ب) نقطة منه ، (ج) نقطتين منه.

5- يكفي لتعيين موضع القضيب، معرفة موضع:

- (أ) نقطة واحدة منه ، (ب) نقطتين منه ، (ج) ثلاث نقاط منه.

6- يكفي لتعيين موضع الجسم الطليق في R^1 ، معرفة عدد الوسطاء المستقلة، وهو:

- (أ) واحد ، (ب) اثنان ، (ج) كل ماسبق صحيح ، (د) ستة ، (هـ) تسعة.

7- يكفي لتعيين موضع الجسم الطليق في R^3 ، معرفة:

- (أ) زوايا أولر ، (ب) إحداثيات نقطة منه ، (ج) الإحداثيات الثلاث لنقطة منه وزوايا أولر الثلاث.

السؤال الثاني (28 درجة): إذا كان الجسم الناقصي الصلب المتجانس منسوباً إلى جملة محاور تناظر Ox, y, z ، وأن

a, b, c أطوال أنصاف محاوره، وكتلته M ، فالمطلوب:

- (1) أوجد $I_{Ox,y}, I_{Oy,z}, I_{Oz,x}$ ، ثم أوجد I_{Oz} وهذا يكون إجراء أي عملية مكاملة.

- (2) أوجد $P_{y,z}, P_{z,x}$.

السؤال الثالث (20 درجة): إذا تحرك قرص صلب دائري نصف قطره R في المستوي الشاقولي OXY بحيث يتدحرج

بدون انزلاق على المحور الأفقي OX ، فالمطلوب: (1) أوجد الوسطاء المستقلة الكافية لتعيين موضع القرص مع الرسم

المناسب. (2) أوجد المركز الأنّي لدوران القرص، وارمز له على الرسم السابق بـ I .

(3) أوجد منحنى القاعدة ومنحنى المتدحرج.

دوراني الزاوي

السؤال الرابع (24 درجة): إذا تحرك مخروط دوراني بحيث يبقى رأسه ساكناً (ثابتاً)، ويبقى محور تناظره OZ واقفاً

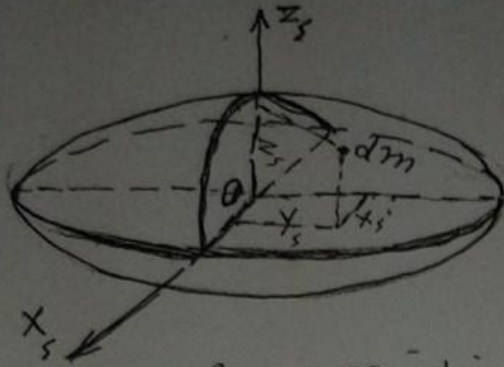
دوماً في المستوي الأفقي، فالمطلوب: (1) أوجد الوسطاء المستقلة الكافية لتعيين موضع المخروط مع الرسم المناسب.

(2) أوجد كلاً من سطح مخروط القاعدة و سطح مخروط المتدحرج.

مدرس المقرر: د. كامل محمد

تمنيتي لكم بالتوفيق والنجاح

السؤال الأول: (1-1) و (2-2) و (3-3) و (4-4) و (5-5) و (6-6) و (7-7) و (8-8).



السؤال الثاني: هذا الفرض محاور الجلة

المتساوية مع الجسم الناقصي هي محاور تناظره وتكون x_s, y_s, z_s كما في الشكل

لذلك مماثلت النقط (أو x_s, y_s, z_s) التي يقع فيها الجسم العنصري dm من الجسم فإنها تحقق:

$$\frac{x_s^2}{a^2} + \frac{y_s^2}{b^2} + \frac{z_s^2}{c^2} \leq 1$$

وهي متباينة جسم كروي. وهكذا نجد أن:

$$dm = \rho dv = \rho dx_s dy_s dz_s = \rho \cdot a \cdot b \cdot c dx_s dy_s dz_s$$

ثم نجري التحويل الذي نخلقه منه على معادلة الكرة في الإحداثيات الكروية:

10

$$x_s = r \sin \theta \cos \varphi, y_s = r \sin \theta \sin \varphi, z_s = r \cos \theta$$

$$0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

ومما لحساب dv حسب dx_s, dy_s, dz_s بدلالة الإحداثيات الكروية

$$dx_s dy_s dz_s = |J| dr d\theta d\varphi$$

ونحسب معين جاكوبي فنجد $J = r^2 \sin \theta$ وبالتالي

$$dm = \rho a \cdot b \cdot c \cdot r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$$

ط الحجاب عزوم الطاقة نطلق من التوزيع من تنقية مما سبق فنجد

$$I_{Ox_s y_s} = \rho \int_V z_s^2 dx_s dy_s dz_s = \rho a \cdot b \cdot c \int_0^1 r^4 dr \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$= \rho a \cdot b \cdot c \cdot \frac{1}{5} \cdot (2) \cdot 2\pi = \rho \left(\frac{4}{3} a \cdot b \cdot c\right) \frac{c^2}{5} = \frac{M}{5} c^2$$

ونفس الطريقة نجد أن

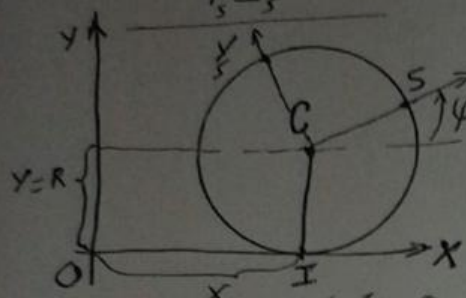
$$I_{Ox_s z_s} = \frac{M}{5} b^2, I_{Oy_s z_s} = \frac{M}{5} b^2$$

2 $I_{Oz_s} = I_{Ox_s z_s} + I_{Oy_s z_s} = \frac{M}{5} b^2 + \frac{M}{5} a^2 = \frac{M}{5} (a^2 + b^2)$

1
3

ط: بما أن Ox_1 متوازي تناظر هندسي للمجموع فكل نقطة من المجموع
وتكن (x_2, y_2, z_2) توجد نظيرة لها بالنسبة لهذا المستوى هي $(x_2, y_2, -z_2)$
وبالتالي يكون
$$P_{x_2 z_2} = \int x_2 z_2 dm = \int_{V/2} x_2 z_2 dm + \int_{V/2} x_2 (-z_2) dm = 0$$

والنفس السبب نجد
(8)
$$P_{y_2 z_2} = \int y_2 z_2 dm = \int_{V/2} y_2 z_2 dm + \int_{V/2} y_2 (-z_2) dm = 0$$



السؤال الثالث: بما أن المحور متوازي فيتين موضع
القرص متلاقطة وسطا هي (x, y) إحداثيات مركز القرص
و φ زاوية الدوران حول C وتكون بما أن القرص
يستدعي Ox فإن $y = R$ كما في الشكل وبما أن تقع
القرص يدور بدون انزلاق فان سرعة النقطة مركزية موقع تمام محيط القرص
مع المحور Ox الثابت معدومة دوماً وبالتالي سرعة نقطة تماس
 $\vec{V}(I) = 0$

20

$$\vec{V}(I) = \vec{V}(C) + \varphi \vec{K} \wedge \vec{CI}$$

(12)

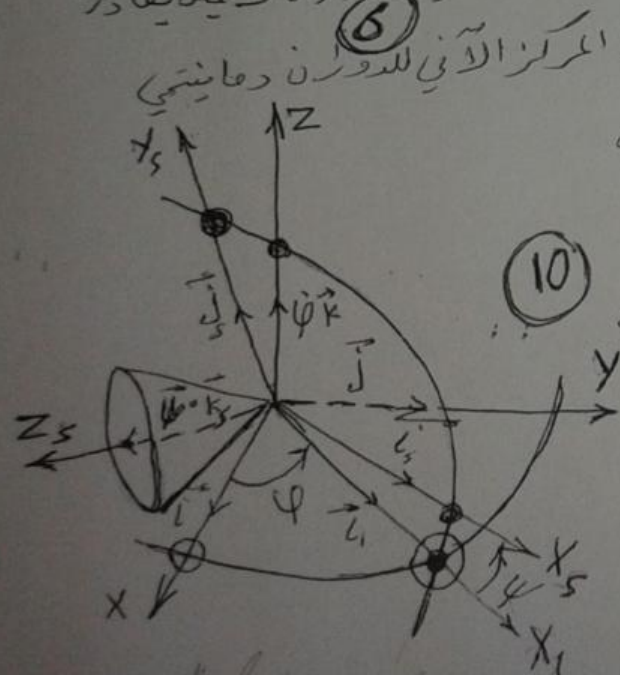
وبالتالي: (ط و x مرتبان خطيا)

$$\dot{x}L + R\dot{\varphi} = 0 \Rightarrow$$

ط: إن I نقطة تماس محيط S مع Ox هي مركز آني للدوران لأن سرعة معدومة
آنياً بسبب الشرع بدون انزلاق (2)

ط: إن صخني القاعدة هو Ox ($y=0$) لأن المركز الآني للدوران لا يمكن أن يفارده
إن صخني المستدعي هو محيط القرص لأن المركز الآني للدوران دائماً يشي

(6)



(10)

السؤال الرابع: نأخذ محلة ثابتة $Ox_1 y_1 z_1$ فيها Oz شاقولي
ونأخذ محلة متحركة $Ox_2 y_2 z_2$ فيها
 Oz_2 أفقي وهو محور تناظر المحل بالوضع
وبالتالي فالمستوي $Ox_1 y_1$ شاقولي وتقع المحاور الأربعة
 Ox_1, Oy_1, Oz_1, Oz_2 في Ox_1 وبما أن الحركة تتم بشتات
نقطة منه هي الرأس بالوضع فهي دورانية
حول الرأس تتعين بمعرفة زوايا أول ولو لكن
بالفرض زاوية التآرجح ثابتة فهي $\theta = \frac{\pi}{2}$
إذن يتعين بمعرفة Ox_1, Ox_2 ط الترخ
(Ox_1, Ox_2) لها الدوران الذاتي

24

ط: نجد أمثلاً مركبات \vec{w} في R فنحل بسهولة على

$$\psi = \varphi, \quad p = \psi \cos \varphi, \quad q = -\psi \sin \varphi$$

ومعادلات المحاور الآتية للدوران

$$\frac{x}{p} = \frac{y}{q} = \frac{z}{\psi} \Rightarrow \frac{x}{\psi \cos \varphi} = \frac{y}{-\psi \sin \varphi} = \frac{z}{\psi}$$

وبجذنا الوسيط نجد $x^2 + y^2 = \left(\frac{\psi}{\psi}\right)^2 z^2$ وهي معادلة سطح
القاعدة دايخ مخروطي رأسه O ومحور تناظره Oz .
ونحل على مركبات \vec{w} في R_3 بسهولة باستقاطنا على المحاور
المتناسقة R_3 وهي

$$p_s = \psi \sin \psi, \quad q_s = \psi \cos \psi, \quad \psi_s = \psi$$

نحل معادلات الآتية للدوران في R_3

$$\frac{x_s}{p_s} = \frac{y_s}{q_s} = \frac{z_s}{\psi_s} \Rightarrow \frac{x_s}{\psi \sin \psi} = \frac{y_s}{\psi \cos \psi} = \frac{z_s}{\psi}$$

وبجذنا الوسيط نجد $x_s^2 + y_s^2 = \left(\frac{\psi}{\psi}\right)^2 z_s^2$ هذه معادلة سطح مخروطي
وهو سطح مخروطي محور تناظره Oz_s و Ox_s و Oy_s .
(7)

[Handwritten signature]

[Handwritten marks]